Решение тригонометрических уравнений

Для решения большинства тригонометрических уравнений требуется применение различных формул и преобразований тригонометрических выражений. Рассмотрим некоторые примеры решения тригонометрических уравнений.

Уравнения, сводящиеся к квадратным

Решить уравнение $2\cos^2(x) - 5\sin(x) + 1 = 0$

Заменяя $\cos^2(x)$ на $1 - \sin^2(x)$, получаем

$2(1 - \sin^2(x)) - 5\sin(x) + 1 = 0$, или

$2\sin^2(x) + 5\sin(x) - 3 = 0$.

Обозначая $\sin(x) = y$, получаем $2y^2 + 5y - 3 = 0$, откуда $y_1 = -3$, $y_2 = 0{,}5$

1) $\sin(x) = -3$ — уравнение не имеет корней, так как $|-3| > 1$;

2) $\sin(x) = 0{,}5$; $x=(-1)^n\arcsin(0{,}5)+\pi n=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

Ответ $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

Решить уравнение $2\cos^2(6x) + 8\sin(3x)\cos(3x) - 4 = 0$

Используя формулы

$\sin^2(6x) + \cos^2(6x) = 1$, $\sin(6x) = 2\sin(3x)\cos(3x)$

преобразуем уравнение:

$3(1 - \sin^2(6x)) + 4\sin(6x) - 4 = 0 \quad => \quad 3\sin^2(6x) - 4\sin(6x) + 1 = 0$

Обозначим $\sin 6x = y$, получим уравнение

$3y^2 - 4y + 1 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = 1/3$

1) $\sin(6x)=1 \Rightarrow 6x=\frac{\pi}{2}+2\pi n \Rightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z$

2) $\sin(6x)=\frac{1}{3} \Rightarrow 6x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n \Rightarrow x=\frac{(-1)^n}{6}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{6}, n\in Z$

Ответ $x = \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $x=\frac{(-1)n}{6}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{6}$, $n\in Z$

Уравнение вида a sin(x) + b cos(x) = c

Решить уравнение 2 sin(x) + cos(x) - 2 = 0

Используя формулы $\sin(x) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos(x) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$ и записывая правую часть уравнения в виде $2 = 2\cdot 1 = 2\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)$ получаем

$$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$3\sin^2\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 0$$

Поделив это уравнение на $\cos^2\frac{x}{2}$ получим равносильное уравнение $3\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 4\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 1 = 0$

Обозначая $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = y$ получаем уравнение $3y^2 - 4y + 1 = 0$, откуда $y_1=1$, $y_1= 1/3$

1) $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

2) $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x}{2} = \mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \pi n \Rightarrow x = 2\mathrm{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

Ответ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ x = 2\mathrm{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

В общем случае уравнения вида a sin(x) + b cos(x) = c, при условиях $a \neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0,\ c^2 \leq b^2 + c^2$ можно решить **методом введения вспомогательного угла.**

Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Введём вспомогательный аргумент φ, такой, что

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$$

Таким образом, уравнение можно записать в виде
$\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

откуда

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

где $\varphi=\arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ или $\varphi=\arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

Изложенный метод преобразования уравнения вида a sin(x) + b cos(x) = c к простейшему тригонометрическому уравнению называется **методом введения вспомогательного угла.**

Решить уравнение 4 sin(x) + 3 cos(x) = 5

Здесь a = 4, b = 3, $\sqrt{a^2+b^2}=5$. Поделим обе части уравнения на 5:

$$\frac{4}{5}\sin(x)+\frac{3}{5}\cos(x)=1$$

Введём вспомогательный аргумент φ, такой, что $\cos\varphi=\frac{4}{5},\ \sin\varphi=\frac{3}{5}$ Исходное уравнение можно записать в виде
$\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=1,\quad \sin(x+\varphi)=1$
откуда

$$x+\varphi=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad \varphi=\arccos\frac{4}{5}$$

$$x=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{4}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$$

Ответ $x=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{4}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

Уравнения, решаемые разложением левой части на множители

Многие тригонометрические уравнения, правая часть которых равна нулю, решаются разложением их левой части на множители.

Решить уравнение sin(2x) - sin(x) = 0
Используя формулу синуса двойного аргумента, запишем уравнепие в виде 2 sin(x) cos(x) - sin(x) = 0. Вынося общий множитель sin(x) за скобки, получаем sin(x) (2 cos x - 1) = 0

1) $\sin(x)=0,\ x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

2) $2\cos(x)-1=0,\ \cos(x)=\frac{1}{2},\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

Ответ $x=\pi n,\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

Решить уравнение cos(3x) cos(x) = cos(2x)
cos(2x) = cos (3x - x) = cos(3x) cos(x) + sin(3x) sin(x), поэтому уравнение примет вид sin(x) sin(3x) = 0

1) $\sin(x)=0,\ x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

2) $\sin(3x)=0,\ x=\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}$

Заметим, что числа πn содержатся среди чисел вида $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$
Следовательно, первая серия корней содержится во второй.

Ответ $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$

Решить уравнение 6 $\sin^2(x)$ + 2 $\sin^2(2x)$ = 5
Выразим $\sin^2(x)$ через $\cos(2x)$
Так как $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, то
$\cos(2x) = 1 - \sin^2(x) - \sin^2(x)$, $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, откуда
$\sin^2(x) = 1/2\ (1 - \cos(2x))$
Поэтому исходное уравнение можно записать так:
$3(1 - \cos(2x)) + 2\ (1 - \cos^2(2x)) = 5$
$2\cos^2(2x) + 3\cos(2x) = 0$
$\cos(2x)\ (2\cos(2x) + 3) = 0$

1) $\cos(2x) = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

2) уравнение $\cos(2x) = -3/2$ корней не имеет.

Ответ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

Задание
Записать конспект в тетрадь. *Подготовиться к контрольной работе.*
Выполненные задания продемонстрировать преподавателю