

Тема: Сфера и шар. Площадь сферы.

Окружность – множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки. Данная точка называется **центром** окружности, расстояние от центра до любой точки окружности называется **радиусом** окружности.

Круг – это часть плоскости, ограниченная окружностью.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

По аналогии с окружностью сферу рассматривают как множество всех точек равноудалённых от заданной точки, но только всех точек не плоскости, а пространства.

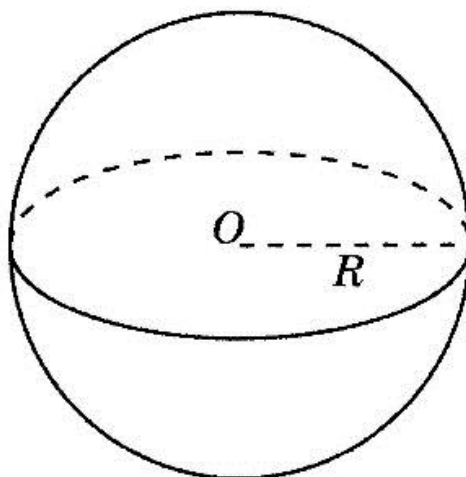


Рисунок 1 – Сфера с центром в точке O и радиусом R

Данная точка O называется **центром** сферы, а заданное расстояние – **радиусом** сферы (обозначается R). Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы, также называется радиусом сферы. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через центр, называется **диаметром** (обозначается D). $D=2R$.

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на заданном расстоянии от данной точки, которую называют **центром**.

Тело, ограниченное сферой, называется **шаром**.

Шар можно описать и иначе. **Шаром** радиуса R с центром в точке O называется тело, которое содержит все точки пространства, расположенные от точки O на расстоянии, не превышающем R (включая O), и не содержит других точек.

Сферу можно получить ещё одним способом - вращением полуокружности вокруг её диаметра, а шар – вращением полукруга вокруг его диаметра.

Уравнение сферы

Прежде чем вывести уравнение сферы введем понятие уравнения поверхности в пространстве. Для этого рассмотрим прямоугольную систему координат $Oxyz$ и некоторую поверхность F . Уравнение с тремя переменными x, y, z называется уравнением поверхности F , если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки поверхности F и не удовлетворяют координаты никакой другой точки.

Пусть сфера имеет центром точку $C(x_0; y_0; z_0)$ и радиус R . Расстояние от любой точки $M(x; y; z)$ до точки C вычисляется по формуле:

$$MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

Исходя из понятия уравнения поверхности, следует, что если точка M лежит на данной сфере, то $MC=R$, или $MC^2=R^2$, то есть координаты точки M удовлетворяют уравнению:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Это выражение называют уравнением сферы радиуса R и центром $C(x_0; y_0; z_0)$.

Взаимное расположение сферы и плоскости

Взаимное расположение сферы и плоскости зависит от соотношения между радиусом сферы R и расстояния от центра сферы до плоскости d .

1. Пусть $d < R$. Если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, тогда сфера и плоскость пересекаются, и сечение сферы плоскостью есть окружность.

2. Пусть $d = R$. Если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы тогда сфера и плоскость имеют только одну общую точку, и в этом случае говорят, что плоскость касается сферы.

3. Пусть $d > R$. Если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек.

Рассмотрим случай касания более подробно.

Определение

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка – точкой касания.

Теорема (свойство касательной плоскости).

Радиус сферы, проведённый в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Теорема (признак касательной плоскости):

Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащей на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

Основные формулы

Соотношение между радиусом сферы, радиусом сечения и расстоянием от центра сферы до плоскости сечения:

$$R^2 = h^2 + r^2$$

Формула для вычисления площади поверхности сферы и ее элементов:

$S = 4\pi R^2$ – площадь сферы.

$S = 2\pi R h$ – площадь поверхности сегмента сферы радиуса R с высотой h .

$S = \pi R h (2h + \sqrt{2hR - h^2})$ – площадь поверхности сектора с высотой h .

Примеры и разбор решения заданий

Задача 1. Площадь сечения шара, проходящего через его центр, равна 9 кв. м. Найдите площадь поверхности шара.

Решение:

Площадь круга вычисляется по формуле: $S_{кр}=\pi R^2$.

Площадь поверхности шара вычисляется по формуле: $S_{сф}=4\pi R^2$. Радиус шара и радиуса сечения, проходящего через центр шара, одинаковые. Поэтому площадь поверхности шара в 4 раза больше площади его диаметрального сечения. То есть площадь поверхности шара равна 36.

Ответ: 36 кв. м.

Задача 2. Вычислите радиус круга, площадь которого равна площади сферы радиуса 5.

Решение:

Площадь сферы равна $S_{сф}=4\pi R^2$. То есть $S_{сф}=100\pi$.

По условию площадь круга некоторого радиуса r также равна 100π . Значит, $r^2=100$, то есть $r=10$.

Ответ: 10.

Задача 3. Все стороны треугольника ABC касаются сферы радиуса 5. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если $AB=13$, $BC=14$, $CA=15$

Решение:

Окружность, вписанная в треугольник, является сечением сферы.

Найдем ее радиус.

Площадь треугольника с известными сторонами можно вычислить по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p=0,5(AB+BC+AC)=21$$

$$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 7 \cdot 3 \cdot 4$$

$$S=84.$$

С другой стороны, $S=p \cdot r$.

Отсюда $r=4$.

Теперь найдем расстояние от центра шара до секущей плоскости.

Используем соотношение:

$$R^2 = h^2 + r^2$$

$$h^2 = R^2 - r^2$$

$$h^2 = 25 - 16 = 9$$

$$h=3.$$

Ответ: 3.

Задача 4. Вершины прямоугольника лежат на сфере радиуса 10. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости прямоугольника, если его диагональ равна 16.

Решение:

Так как вершины прямоугольника лежат на сфере, то окружность, описанная около прямоугольника, является сечением сферы.

Радиус окружности, описанной около прямоугольника, равен половине его диагонали, то есть $r=8$.

По условию задачи $R=10$.

Используем соотношение:

$$R^2 = h^2 + r^2$$

$$h^2 = R^2 - r^2$$

$$h^2 = 100 - 64 = 36$$

$h=6$.

Ответ: 6.

Задача для самостоятельного решения

Линия пересечения сферы и плоскости, удаленной от центра сферы на 8 см, имеет длину 12π см. Найдите площадь поверхности сферы.

Задание

Записать конспект. Выучить формулы. Записать решенные задачи в рабочую тетрадь. Решить задачу для самостоятельного решения.

Выполненные задания продемонстрировать преподавателю.