Тема урока: **Пирамида. Правильная пирамида.**

Д/З. **Проработать конспект. Зарисовать рисунки пирамиды, правильной пирамиды и усечённой пирамиды. Записать теоремы. Просмотреть презентацию и ответить на вопросы.**

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме:

- Понятие пирамиды;
- Виды пирамид;
- Элементы пирамиды: вершина, ребра, грани, основание;
- Площадь боковой поверхности и полной поверхности пирамиды.

Глоссарий по теме

Пирамида – многогранник, составленный из *n*-угольника и *n* треугольников

Основание пирамиды – грань пирамиды, являющаяся *n*-угольником

Вершина пирамиды – общая точка всех треугольников, лежащих в боковых гранях.

Боковая грань – грань пирамиды, являющаяся треугольником

Боковые ребра – общие отрезки боковых граней

Высота – перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на ее основание

Апофема – высота боковой грани правильной пирамиды

Правильная пирамида – пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину и центр основания пирамиды, является высотой

Усеченная пирамида – многогранник, образованный двумя *n*-угольниками, расположенными в параллельных плоскостях (нижнее и верхнее основание) и *n*-четырехугольников (боковые грани).

Площадь полной поверхности пирамиды – сумма площадей всех граней пирамиды

Площадь боковой поверхности пирамиды – сумма площадей боковых граней пирамиды

Определение пирамиды

Рассмотрим многоугольник $A_1A_2...A_n$ и точку P, не лежащую в плоскости этого многоугольника (рис.1). Соединив точку P с вершинами многоугольника, получим n треугольников: PA_1A_2, PA_2A_3,…, PA_nA_1. Многогранник, составленный из n-угольника $A_1A_2...A_n$ и n треугольников, называется **пирамидой.** Многоугольник $A_1A_2...A_n$ называется **основанием**, а треугольники PA_1A_2, PA_2A_3,…, PA_nA_1 – **боковые грани** пирамиды, отрезки PA_1, PA_2,…, PA_n – **боковые ребра** пирамиды, точка **P** – вершина пирамиды. Пирамиду с основанием $A_1A_2...A_n$ и вершиной P называют n-угольной пирамидой и обозначают $PA_1A_2...A_n$.

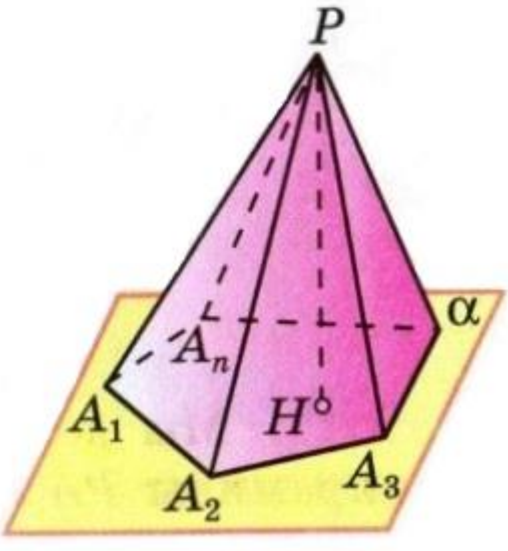


Рисунок 1 - пирамида

Высота пирамиды

Перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания, называется высотой пирамиды. На рисунке 1 PH является высотой. Обратите внимание, что высота может лежать и вне пирамиды (рис. 3) или быть одним из боковых ребер (рис. 4).

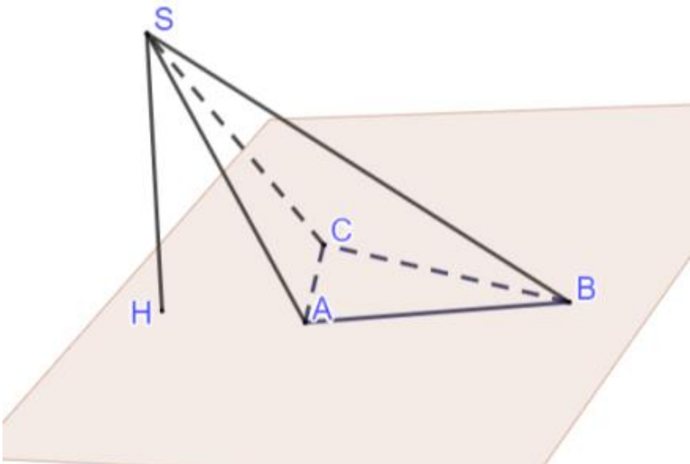


Рисунок 3 – высота вне пирамиды

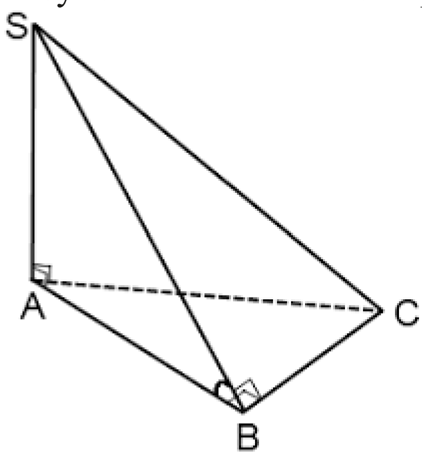


Рисунок 4 – Высота пирамиды - боковое ребро

Правильная пирамида

Будем называть пирамиду правильной, если ее основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой. Напомним, что центром правильного многоугольника называется центр вписанной в него (или описанной около него) окружности (рис.5).

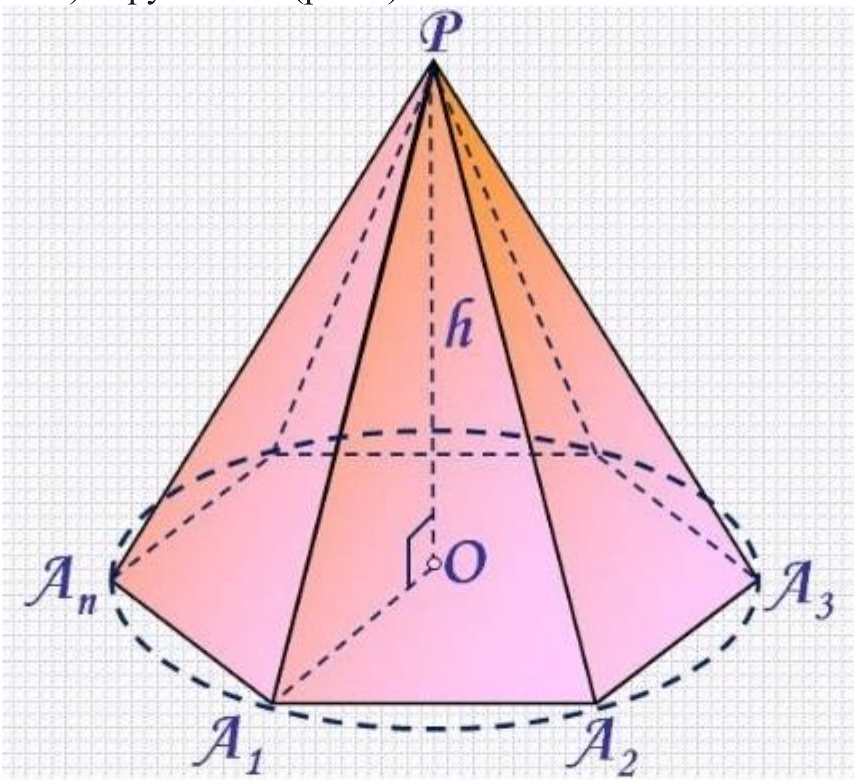


Рисунок 5 – Правильная пирамида

Правильная пирамида обладает несколькими хорошими свойствами. Давайте выясним, какими.

Рассмотрим правильную пирамиду $PA_1A_2...A_n$ (рис. 5).

Пусть O – центр описанной около основания окружности, тогда PO – высота пирамиды, значит PO перпендикулярен любой прямой, лежащей в плоскости основания. Таким образом, высота PO перпендикулярна радиусам A_1O, $A_2O,...A_nO$.

Образованные высотой и радиусами треугольники являются прямоугольными. Причем, эти треугольники имеют общий катет – PO и равные катеты A_1O, $A_2O,...A_nO$ (равны как радиусы). Значит, треугольники POA_1, $POA_2,...POA_n$ равны по двум катетам, значит равны гипотенузы PA_1, $PA_2...$ PA_n, которые являются боковыми ребрами правильной пирамиды. Боковые ребра пирамиды равны, значит боковые грани – равнобедренные треугольники. Основания этих треугольников равны друг другу, так как в основании лежит правильный многоугольник. Следовательно, боковые грани равны по третьему признаку равенства треугольников.

Таким образом, верны следующие утверждения:

- **Все боковые ребра правильной пирамиды равны.**
- **Боковые ребра правильной пирамиды являются равными равнобедренными треугольниками.**

Введем еще одно определение. **Апофемой** называется высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины. На рисунке 5 PE – одна из апофем.
Все апофемы правильной пирамиды равны друг другу как высоты в равных треугольниках.

Усеченная пирамида
Возьмем произвольную пирамиду $PA_1A_2...A_n$ и проведем секущую плоскость β, параллельную плоскости основания пирамиды α и пересекающую боковые ребра в точках $B_1, B_2, ...B_n$ (рис. 6). Плоскость β разбивает пирамиду на два многогранника. Многогранник, гранями которого являются n-угольники $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ (**нижнее и верхнее основания соответственн**о), расположенные в параллельных плоскостях и n четырехугольников $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, … $A_1A_nB_nB_1$ (**боковые грани**), называется **усеченной пирамидой.**

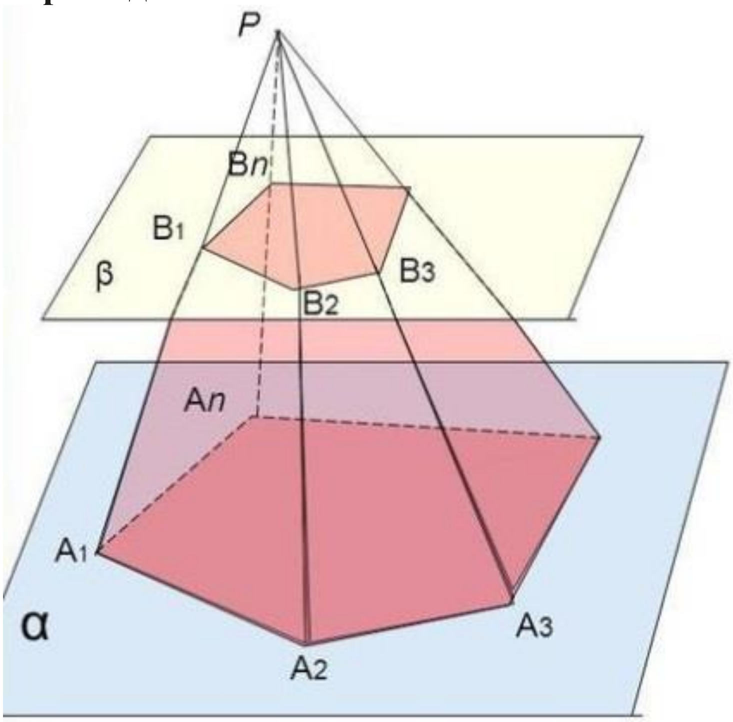


Рисунок 6 – Усеченная пирамида

Отрезки A_1B_1, A_2B_2, … A_nB_n называют **боковыми ребрами** усеченной пирамиды.
Усеченную пирамиду с основаниями $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ обозначают следующим образом: $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$.
Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания называется **высотой усеченной пирамиды.** На рисунке 7 отрезки HH_1 и B1O –высоты усеченной пирамиды.

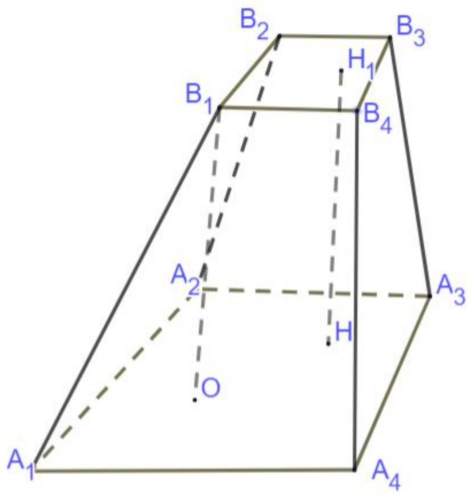


Рисунок 7 – Высота усеченной пирамиды

Площадь поверхности пирамиды

Площадью полной поверхности пирамиды называются сумма площадей всех ее граней, а площадью боковой поверхности пирамиды – сумма площадей ее боковых граней.

Для пирамиды, верно равенство

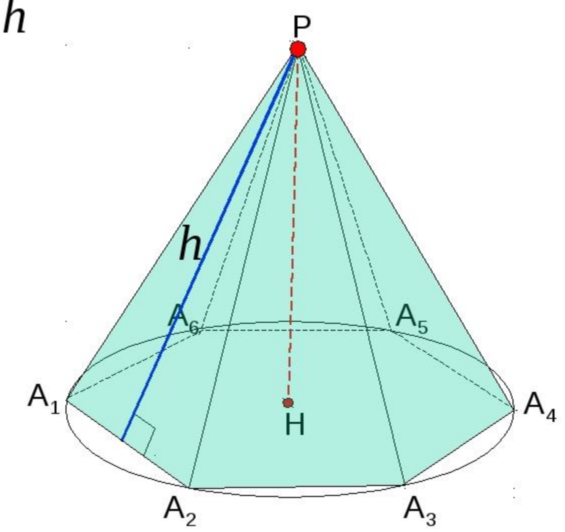
$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}.$$

Докажем теорему для площади боковой поверхности правильной пирамиды.

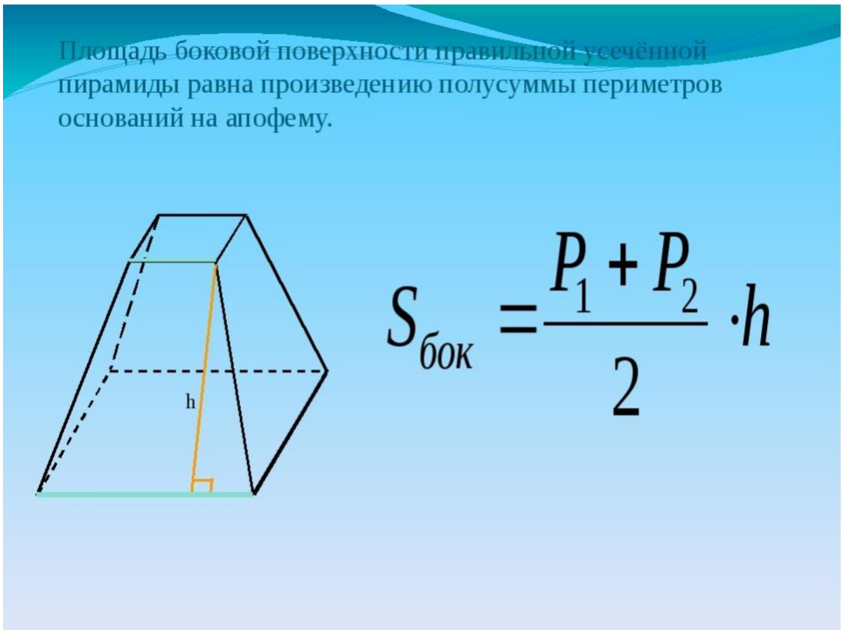
Теорема. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h$$



Теорема. Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.



Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля
Задание 1. В пятиугольной пирамиде все боковые грани равны между собой. Площадь основания равна 42, а площадь боковой грани на 15 меньше. Чему равна площадь полной поверхности пирамиды?
Решение
Поскольку в пирамиде все боковые грани равны, то и площади их будут равны. Знаем, что площадь боковой грани на 15 меньше площади основания, значит она равна 27. В пятиугольной пирамиде боковых граней 5. Таким образом площадь полной поверхности равна 27*5+42 = 177.
Ответ: 177
Задание 2. В правильной пирамиде высота боковой грани равна 10, а в основании лежит квадрат со стороной 4. Чему равна площадь боковой поверхности?
Решение
Боковая грань пирамиды – это треугольник. Все боковые грани этой пирамиды равны между собой, так как пирамида правильная. Вычислим площадь треугольника: ½*4*10=20. В основании пирамиды лежит квадрат, значит боковых граней будет 4. Таким образом, площадь боковой поверхности равна 4* 20=80.
Ответ: 80

Д/З. После просмотра презентации постарайтесь ответить на вопросы:

1. Какая пирамида называется правильной?
2. Являются ли равными боковые ребра правильной пирамиды?

3. Чем являются боковые грани правильной пирамиды?
4. Что называется апофемой?
5. Сколько высот в пирамиде? Сколько апофем в пирамиде?
6. Сколько апофем в правильной пирамиде?
7. Равны ли апофемы правильной пирамиды друг другу? Почему7
8. Запишите формулу полной площади поверхности пирамиды.
9. Запишите формулу площади боковой поверхности правильной пирамиды.