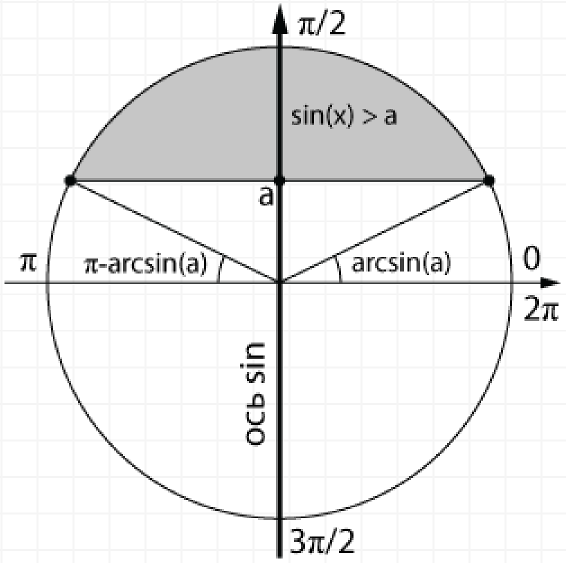
Тема: Решение тригонометрических неравенств

Неравенства вида $\sin x > a$ и $\sin x < a$

Пусть дано простейшее неравенство $\sin x > a$.

1) При $-1 < a < 1$ множество всех решений данного тригонометрического неравенства будем искать с помощью тригонометрического круга.



Из данного рисунка видно, что в этом случае решение неравенства будет таким:
$x \in (\arcsin a + 2\pi k;\ \ \pi - \arcsin a + 2\pi k),\, k \in \mathbb{Z}$

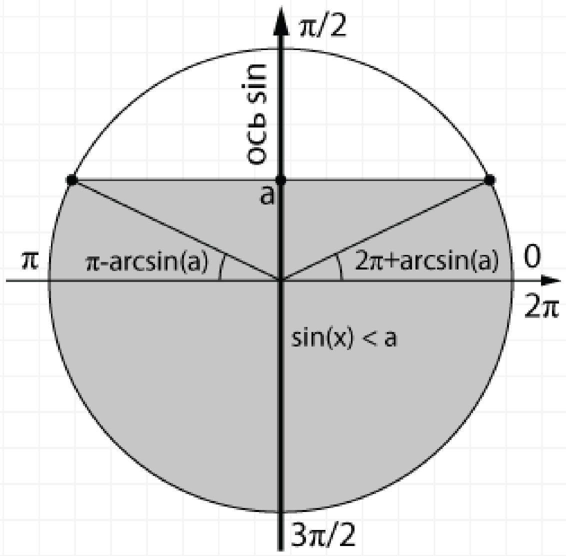
2) При a ≥ 1 неравенство не имеет решений: $x \in \emptyset$

3) При a < -1 решением неравенства является любое действительное число: $x \in \mathbb{R}$

4) При a $= -1$ решением неравенства является любое действительное число, отличное от $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Пусть дано простейшее неравенство $\sin x < a$.

1) При $-1 <$ a < 1 множество всех решений данного тригонометрического неравенства будем искать с помощью тригонометрического круга.



Из данного рисунка видно, что в этом случае решение неравенства будет таким:
$x \in (\pi - \arcsin a + 2\pi k;\ \ 2\pi + \arcsin a + 2\pi k),\, k \in \mathbb{Z}$

2) При a > 1 решением неравенства является любое действительное число: $x \in \mathbb{R}$

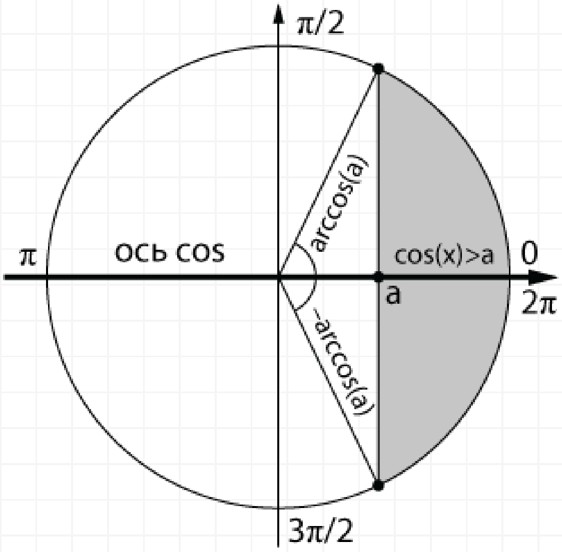
3) При a $= 1$ решением неравенства является любое действительное число, отличное от $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

4) При a ≤ -1 неравенство не имеет решений.

Неравенства вида $\cos x > a$ и $\cos x < a$

Пусть дано простейшее неравенство $\cos x > a$.

1) При $-1 < a < 1$ множество всех решений данного тригонометрического неравенства будем искать с помощью тригонометрического круга.



Из данного рисунка видно, что в этом случае решение неравенства будет таким:

$x \in (-\arccos(a) + 2\pi k;\ \ \arccos a + 2\pi k),\ \ k \in \mathbb{Z}$

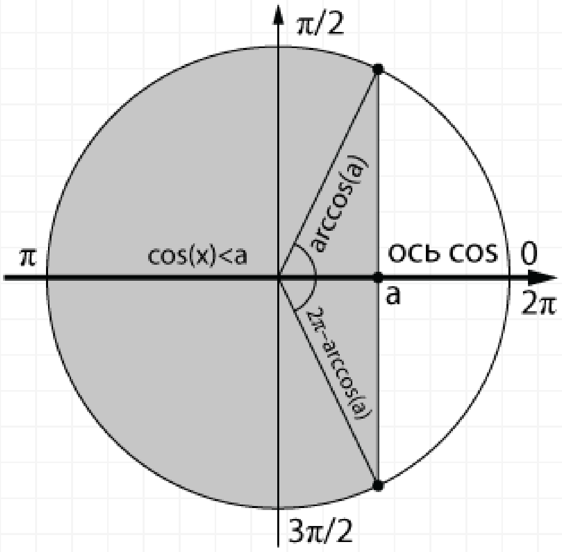
2) При $a \geq 1$ неравенство не имеет решений.

3) При a < -1 решением неравенства является любое действительное число: $x \in \mathbb{R}$

4) При a $= -1$ решением неравенства является любое действительное число, отличное от $\pi + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$

Пусть дано простейшее неравенство $\cos x < a$.

1) При $-1 < a < 1$ множество всех решений данного тригонометрического неравенства будем искать с помощью тригонометрического круга.



Из данного рисунка видно, что в этом случае решение неравенства будет таким:

$x \in (\arccos a + 2\pi k;\ \ 2\pi - \arccos a + 2\pi k),\ \ k \in \mathbb{Z}$

2) При $a > 1$ решением неравенства является любое действительное число: $x \in \mathbb{R}$

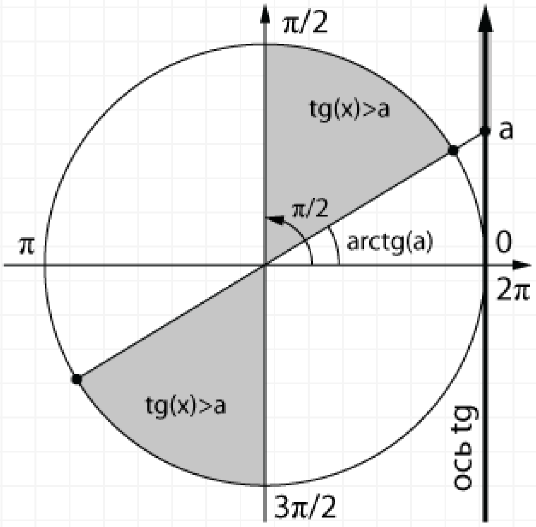
3) При $a \leq -1$ неравенство не имеет решений.

4) При $a = 1$ решением неравенства является любое действительное число, отличное от $2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$

Неравенства вида $tg\ x > a$ и $tg\ x < a$

Пусть дано простейшее неравенство $tg\ x > a$.

Множество всех решений данного тригонометрического неравенства будем искать с помощью тригонометрического круга.

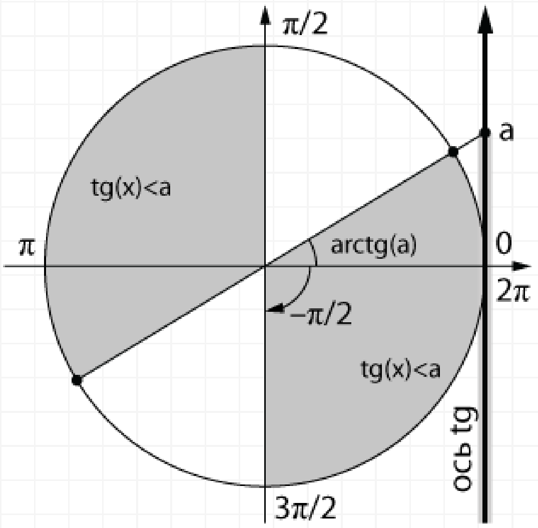


Из данного рисунка видно, что при любом $a \in \mathbb{R}$ решение неравенства будет таким:

$$x \in \left(arctg\ a + \pi k;\ \ \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Пусть дано простейшее неравенство $tg\ x < a$.

Множество всех решений данного тригонометрического неравенства будем искать с помощью тригонометрического круга.



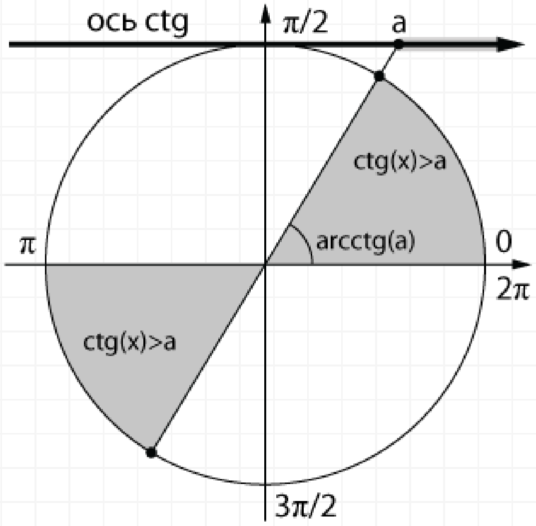
Из данного рисунка видно, что при любом $a \in \mathbb{R}$ решение неравенства будет таким:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \ arctg\ a + \pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Неравенства вида $ctg\ x > a$ и $ctg\ x < a$

Пусть дано простейшее неравенство $ctg\ x > a$.

Множество всех решений данного тригонометрического неравенства будем искать с помощью тригонометрического круга.

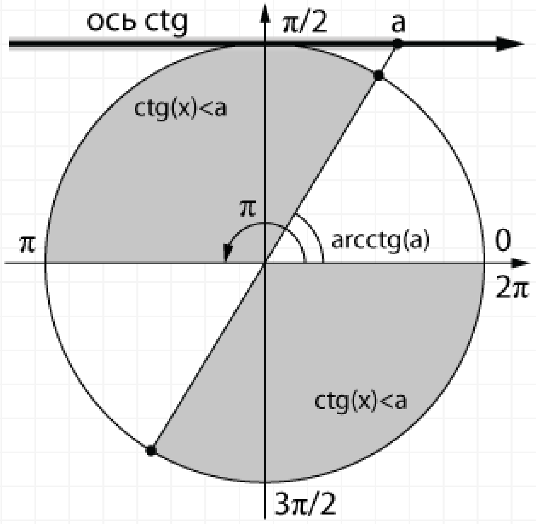


Из данного рисунка видно, что при любом $a \in \mathbb{R}$ решение неравенства будет таким:

$x \in (\pi k;\ \ arcctg\ a + \pi k),\ \ k \in \mathbb{Z}$

Пусть дано простейшее неравенство $ctg\ x < a$.

Множество всех решений данного тригонометрического неравенства будем искать с помощью тригонометрического круга.



Из данного рисунка видно, что при любом $a \in \mathbb{R}$ решение неравенства будет таким:

$x \in (arcctg\ a + \pi k;\ \ \pi + \pi k),\ \ k \in \mathbb{Z}$

Решение тригонометрических неравенств

ПРИМЕР 1. Решим неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$.

Так как $-1 < \frac{1}{2} < 1$, то

$$x \in \left(\arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k;\ \ \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Так как $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, то решение можно переписать в виде

$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$$

ПРИМЕР 2. Решим неравенство $\sin\ x < -\frac{2}{3}$.

Так как $-1 < -\frac{2}{3} < 1$, то

$$x \in \left(\pi - \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k;\ \ 2\pi + \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Воспользовавшись равенством $\arcsin(-a) = -\arcsin a$, перепишем решение в виде

$$x \in \left(\pi + \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k;\ \ 2\pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$$

ПРИМЕР 3. Решим неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$.

Так как $-1 < \frac{1}{2} < 1$, то

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \ \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$$

ПРИМЕР 4. Решим неравенство $\cos x < -0{,}3$.

Так как $-1 < -0{,}3 < 1$, то

$$x \in (\arccos(-0{,}3) + 2\pi k;\ \ 2\pi - \arccos(-0{,}3) + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$$

Воспользовавшись равенством $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$, перепишем решение в виде

$$x \in (\pi - \arccos 0{,}3 + 2\pi k;\ \ \pi + \arccos 0{,}3 + 2\pi k),\ \ k \in \mathbb{Z}$$

ПРИМЕР 5. Решим неравенство $tg\ x > 1$.

Очевидно, что решение неравенства будет таким:

$$x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi k;\ \ \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$$

ПРИМЕР 6. Решим неравенство $tg\ x < -\frac{1}{2}$.

Очевидно, что решение неравенства будет таким:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \ arctg\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Воспользовавшись равенством $arctg(-a) = -arctg\ a$, перепишем решение в виде

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \ -arctg\frac{1}{2} + \pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$$

ПРИМЕР 7. Решим неравенство $ctg\ x > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Очевидно, что решение неравенства будет таким:

$$x \in \left(\pi k;\ \ \frac{\pi}{3} + \pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$$

ПРИМЕР 8. Решим неравенство $ctg\ x < -\frac{5}{4}$.

Очевидно, что решение неравенства будет таким:

$$x \in \left(arcctg\left(-\frac{5}{4}\right) + \pi k;\ \ \pi + \pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Воспользовавшись равенством $arcctg(-a) = \pi - arcctg\ a$, перепишем решение в виде

$$x \in \left(\pi - arcctg\frac{5}{4} + \pi k;\ \ \pi + \pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$$

или в виде

$$x \in \left(-arcctg\frac{5}{4} + \pi n;\ \ \pi n\right),\ \ n \in \mathbb{Z}$$

Задание. Изучить конспект. Разобрать решенные примеры и записать их в тетрадь.

Выполненные задания продемонстрировать преподавателю